

Logische Äquivalenz

Definition 2.7 [Logische Äquivalenz]

Zwei Formeln $\varphi, \psi \in \text{FO}(S)$ heißen (logisch) äquivalent, gdw. für alle S-Interpretationen J gilt: $J \models \varphi$ gdw. $J \models \psi$. In

Symbolen: $\varphi \equiv \psi$.

Bem.: Logische Äquivalenzen der AL übertragen sich auf FO. Hinzu treten charakteristische logische Äquivalenzen im Zusammenhang mit Quantoren.

Z.B. die Dualität zwischen $\forall$ und $\exists$, die besagt dass für alle $\varphi \in \text{FO}(S)$:

$$\exists x \varphi \equiv \neg \forall x \neg \varphi,$$

$$\forall x \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi.$$

Erfüllbarkeitsäquivalenz

Definition 2.10 Erfüllbarkeitsäquivalenz

Formeln φ, φ' heißen erfüllbarkeitsäquivalent wenn gilt: φ erfüllbar gdw. φ' erfüllbar. Analog wird Erfüllbarkeitsäquivalenz für Formelmengen definiert.

Signaturen

Eine **Signatur S** ist eine Menge von Konstanten-, Funktions- und Relationssymbolen, mit angegebenen Stelligkeiten. Spezialfall: S ohne Funktionssymbole : relationale Signatur; S ohne Relationssymbole : funktionale Signatur.

S-Strukturen

Definition 1.1 [S-Strukturen]

Für Signatur S: Eine S-Struktur $A = (A, c^A, \dots, f^A, \dots, R^A, \dots)$ besteht aus ihrer Trägermenge $A \neq \emptyset$ zusammen mit einer Interpretation der Symbole in S, d.h., für jedes Konstantensymbol $c \in S$: ein ausgezeichnetes Element $c^A \in A$. für jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in S$: eine n-stellige Funktion $f^A : A^n \rightarrow A$. für jedes n-stellige Relationssymbol $R \in S$: eine n-stellige Relation $R^A \subseteq A^n$.

S-Terme

Definition 1.3 [S-Terme] Die Menge der S-Terme, $T(S)$ (mit Variablenmenge V) ist induktiv erzeugt wie folgt:

- $x \in T(S)$ für jede Variable $x \in V$.
- $c \in T(S)$ für jedes Konstantensymbol $c \in S$.
- ist $f \in S$ ein n-stelliges Funktionssymbol, und sind $t_1, \dots, t_n \in T(S)$, so ist auch $f t_1 \dots t_n \in T(S)$.

$T_n(S) \subseteq T(S)$: die Mengen der Terme, in denen nur Variablensymbole aus $V_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ vorkommen.

Speziell steht $T_0(S)$ für die Menge der Variablen-freien Terme ($= \emptyset$ wenn S keine Konstanten hat).

Allgemeingültigkeit

Definition 2.6 [Allgemeingültigkeit]

Eine Formel $\varphi \in \text{FO}(S)$ heißt allgemeingültig gdw. für alle S-Interpretationen J gilt: $J \models \varphi$.

Folgerungsbeziehung

Definition 2.5 [Folgerungsbeziehung]

$\varphi \models \psi$ bzw. $\Phi \models \psi$.

Für $\varphi, \psi \in \text{FO}(S)$: ψ ist eine logische Folgerung von φ , oder ψ folgt aus φ , in Symbolen $\varphi \models \psi$, gdw. für alle S-Interpretationen J gilt: $J \models \varphi \Rightarrow J \models \psi$.

Entsprechend ist $\Phi \models \psi$ für Formelmengen Φ definiert (ψ folgt aus Φ).

FO mit und ohne Gleichheit

Definition 2.11 [FO ohne Gleichheit]

$\text{FO}^*(S) \subseteq \text{FO}(S)$ ist aufgebaut wie FO aber ohne Termgleichheiten als atomare Formeln. Die Semantik von FO überträgt sich auf die Teillogik FO^* .

Bemerkung 2.13 Zu jeder Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}(S)$ erhält man durch eine systematische Übersetzung in eine explizite Modellierung der Gleichheitsrelation durch eine neues Relationssymbol $\sim$ eine erfüllbarkeitsäquivalente Formelmenge $\Phi_{\sim} \subseteq \text{FO}^*(S \cup \{\sim\})$.

Termstruktur

Definition 1.4 Termstrukturen

Die Menge der S-Terme ist Träger einer S_F -Struktur $T = T(S)$, der Termstruktur (**Herbrand-Struktur**) zu S, mit der folgenden natürlichen Interpretation der Konstanten- und Funktionssymbole in S:

- für Konstantensymbol $c \in S$: $c^T := c \in T(S)$.
- für n-stelliges Funktionssymbol $f \in S$: $f^T : T(S)^n \rightarrow T(S)$ ($t_1, \dots, t_n \rightarrow f t_1 \dots t_n$). Wenn S Konstantensymbole hat, ist auch $T_0(S)$ Träger einer entsprechenden Termstruktur $T_0(S)$ (eine Substruktur von $T(S)$).

Pränexe Normalform

Definition 3.1 [pränexe NF] FO-Formeln in pränexer Normalform sind von der Form $Q_1 x_1 \dots Q_k x_k \psi$, wo $k \in \mathbb{N}$, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und ψ **quantorenfrei**. ψ heißt auch quantorenfreier Kern der Formel, $Q_1 x_1 \dots Q_k x_k$ ihr Quantorenpräfix.

Man braucht i.d.R. zusätzliche Variablensymbole!

Satz 3.4 Jede FO-Formel ist äquivalent zu einer Formel in pränexer NF.

Beispiel 3.2 $S = \{E\}$, E 2-st. Relations-Symbol. Die folgenden Äquivalenzen liefern auf der rechten Seite pränexe Formalisierungen:

$$\begin{aligned} \exists y (E x y \wedge \forall x (E y x \rightarrow x = y)) &\equiv \\ \exists y \forall z E x y \wedge (E y z \rightarrow z = y) &, \\ \exists y \forall x E x y \vee \neg \exists y E x y &\equiv \exists y \forall y_2 \forall y_3 \\ E y_2 y_1 \vee \neg E x y_3 &. \end{aligned}$$

Belegungen

Definition 1.5

[Belegungen und Interpretationen]

Eine Funktion $\beta: V \rightarrow A$ heißt Belegung (für die $x \in V$) in der S-Struktur $A = (A, \dots)$. Eine S-Struktur A und Belegung β zusammen bilden eine S-Interpretation $J = (A, \beta)$.

• Für $t = x$ ($x \in V$ Variable):

$$t^J := \beta(x).$$

• Für $t = c$ ($c \in S$ Konstantensymbol):

$$t^J := c^A.$$

• Für $t = f t_1 \dots t_n$, mit n -stelligem Funktionssymbol $f \in S$:
 $t^J := f^A(t_1^J, \dots, t_n^J).$

Schreibweisen für Belegungen und Interpretationen auf Seite 6 FO Skript über Kapitel 2

Freie Variablen

Definition 2.2 [freie Variablen]

Induktive Definition der Menge der freien Variablen, $\text{frei}(\varphi) \subseteq V$, für $\varphi \in \text{FO}(S)$:

Formeln **ohne** freie Variablen heißen **Sätze**.

Freie Variablen (cont)

Schreibweisen: $\text{FO}_n(S) := \{\varphi \in \text{FO}(S) : \text{frei}(\varphi) \subseteq V_n\}$. Für $\varphi \in \text{FO}_n(S)$ schreiben wir auch $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ um die möglicherweise freien Variablen explizit anzudeuten.

$$\text{frei}(t_1 = t_2) := \text{frei}(t_1) \cup \text{frei}(t_2).$$

$$\text{frei}(R t_1 \dots t_n) := \text{frei}(t_1) \cup \dots \cup \text{frei}(t_n).$$

$$\text{frei}(\neg \varphi) := \text{frei}(\varphi).$$

$$\text{frei}(\varphi \wedge \psi) = \text{frei}(\varphi \vee \psi) := \text{frei}(\varphi) \cup \text{frei}(\psi).$$

$$\text{frei}(\exists x \varphi) = \text{frei}(\forall x \varphi) := \text{frei}(\varphi) \setminus \{x\}.$$

Quantorenrang

Definition 2.3 [Quantorenrang]

Induktive Definition des Quantorenrangs, $\text{qr}(\varphi) \in \mathbb{N}$, für $\varphi \in \text{FO}(S)$:

Formeln von Quantorenrang 0 heißen **quantorenfrei**.

$$\text{qr}(\varphi) = 0 \text{ für atomares } \varphi.$$

$$\text{qr}(\neg \varphi) := \text{qr}(\varphi).$$

$$\text{qr}(\varphi \wedge \psi) = \text{qr}(\varphi \vee \psi) := \max(\text{qr}(\varphi), \text{qr}(\psi)).$$

$$\text{qr}(\exists x \varphi) = \text{qr}(\forall x \varphi) := \text{qr}(\varphi) + 1.$$

Semantik

Definition 2.4 [Semantik]

Für S-Interpretation $J = (A, \beta)$ und $\varphi \in \text{FO}(S)$: J erfüllt φ gdw. $\varphi^J = 1$. **Schreibweise:** $J \models \varphi$.

Für Formelmengen $\Phi \subseteq \text{AL}(V)$ entsprechend: $J \models \Phi$ gdw. $J \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.

Die Relation $\models$ heißt Modellbeziehung.

Herbrand

Satz 3.10 (Herbrand)

Sei $\Phi \subseteq \text{FO}_0 \neq \{ \}$ eine Menge von universellen, gleichheitsfreien Sätzen. Dann sind äquivalent:

(i) Φ erfüllbar.

(ii) Φ hat ein Herbrand-Modell $H = (T_0(S), (R^H)_{R \in S}) \models \Phi$, dessen Trägermenge und Funktions- und Konstanteninterpretationen mit der Termstruktur $T_0(S)$ übereinstimmen (H erweitert die S_F -Struktur $T_0(S)$ lediglich um eine geeignete Interpretation der Relationssymbole in S).

Definition 3.8 Eine Formel ist **universell** wenn sie aus atomaren und negiert atomaren Formeln allein mittels $\wedge, \vee$ und $\forall$ -Quantoren aufgebaut ist.

Lemma 3.12 Sei $\Phi \subseteq \text{FO}_0 \neq \{ \}$ eine Menge von universell-pränexen Sätzen. Dann sind äquivalent:

(i) Φ erfüllbar. (ii) $[[\Phi]]^{\text{AL}}$ erfüllbar.

Erfüllbarkeit

• $\Phi \subseteq \text{FO}_0(S)$ eine Satzmenge (ohne freie Variablen) ist. Man erhält eine zu einer Formelmengen erfüllbarkeitsäquivalente Satzmenge, indem man neue Konstantensymbole für alle freien Variablen substituiert

• $\Phi \subseteq \text{FO}_0 \neq \{ \}$ gleichheitsfrei ist. Eine explizite Modellierung der Gleichheitsrelation durch eine zusätzliche Äquivalenzrelation (siehe Bemerkung 2.13) führt zu erfüllbarkeitsäquivalenten Satzmenge ohne Gleichheit.

Erfüllbarkeit (cont)

• $\Phi \subseteq \text{FO}_0 \neq \{ \}$ aus universell-pränexen, gleichheitsfreien Sätzen besteht. Skolemisierung liefert eine erfüllbarkeitsäquivalente Satzmenge in universell-pränexer Form.

• S mindestens ein Konstantensymbol enthält, sodass $T_0(S) \neq \emptyset$ ist, und wir uns ggf. auf Herbrand-Modelle von $\Phi \subseteq \text{FO}_0 \neq \{ \}$ zurückziehen können.

Φ erfüllbar $\Leftrightarrow H \models \Phi$ für eine Herbrand-Struktur $H = T_0(S), (R^H)_{R \in S}$.

Kompaktheitssatz (FO)

Satz 4.1 (Kompaktheitssatz) Für jede Formelmengen $\Phi \subseteq \text{FO}$ sind äquivalent:

(i) Φ erfüllbar. (ii) Jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ist erfüllbar.

Korollar 4.2 Für jede Formelmengen $\Phi \subseteq \text{FO}$ und Formel $\psi \in \text{FO}$ sind äquivalent:

(i) $\Phi \models \psi$. (ii) Es existiert eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, sodass $\Phi_0 \models \psi$.

Das Korollar folgt aus dem Satz über den Zusammenhang: $\Phi \models \varphi$ gdw. $\Phi \cup \{ \neg \varphi \}$ unerfüllbar.